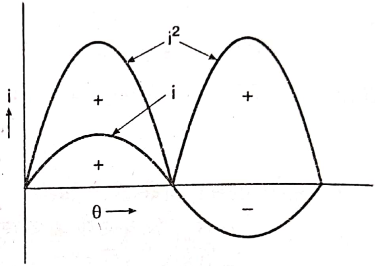
§ 7.2 वर्ग-माध्य-मूल मान
(Root-Mean-Square or R.M.S. Value) (U.P. 1999, 2001)

हम जानते हैं कि प्रत्यावर्ती धारा की दिशा तथा परिमाण एक निश्चित क्रम में परिवर्तित होते रहते हैं। प्रत्येक चक्र में धारा पहले आधे चक्र के लिये एक दिशा में तथा दूसरे आधे चक्र के लिये विपरीत दिशा में प्रवाहित होती है। इस प्रकार एक पूर्ण चक्र में प्रत्यावर्ती धारा का औसत मान शून्य होता है। परन्तु प्रत्यावर्ती धारा के एक पूर्ण चक्र के लिये धारा के तात्क्षणिक मानों के वर्गों (squares) का औसत मान शून्य नहीं होता, जैसा कि चित्र 7.5 से स्पष्ट है। धारा के तात्क्षणिक मानों के वर्गों के औसत मान के वर्गमूल को धारा का **वर्ग-माध्य-मूल मान** (R.M.S. Value) कहते हैं तथा इसे I_{rms} से प्रदर्शित करते हैं।



चित्र—7.5

यदि किसी प्रतिरोध $R\ \Omega$ में T सेकण्ड तक दिष्ट धारा प्रवाहित की जाये तब उत्पन्न ऊष्मा का मान I^2RT जूल होगा। यदि हम इसी प्रतिरोध में प्रत्यावर्ती धारा को भी T सेकण्ड तक प्रवाहित करायें तथा उत्पन्न ऊष्मा का मान उतना ही हो, जितना दि० धा० के कारण होता है तो हम कह सकते हैं कि ऊर्जा के प्रभाव में प्र० धा० तथा दि० धा० एक समान हैं। अर्थात **प्रत्यावर्ती धारा का प्रभावी मान उस दिष्ट धारा के बराबर होता है जो समान समय में समान प्रतिरोध में बराबर मान की ऊष्मा (ऊर्जा) उत्पन्न कर सके।**

7.2–1 प्रत्यावर्ती धारा का वर्ग-माध्य-मूल मान—इस प्रकार प्रत्यावर्ती धारा का वर्ग-माध्य-मूल मान, दिष्ट धारा (D.C.) के उस मान के बराबर होता है जिससे किसी दिये हुए प्रतिरोध तार में एक सेकण्ड में उतनी ऊष्मा होती है, जितनी कि प्रत्यावर्ती धारा में उतने ही समय में उत्पन्न होती है। प्रत्यावर्ती धारा के वर्ग माध्य-मूल मान (I_{rms}) को धारा का **प्रभावी मान** (effective value) **या आभासी मान** (virtual value) भी कहते हैं।

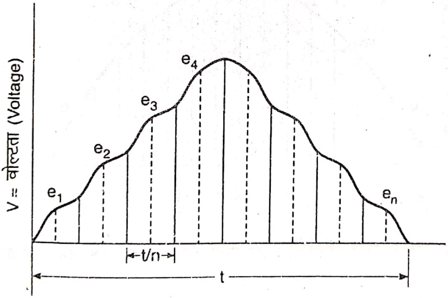
7.2–2 प्रत्यावर्ती वोल्टता का वर्ग-माध्य-मूल मान—इसी प्रकार प्रत्यावर्ती वोल्टता का वर्ग-माध्य-मूल मान, दिष्ट वोल्टता के उस मान के बराबर होता है जिससे किसी दिये हुए प्रतिरोध तार में एक सेकण्ड में उतनी ही ऊष्मा होती है, जितनी की प्रत्यावर्ती वोल्टता द्वारा उतने ही समय में उत्पन्न होती है। प्रत्यावर्ती वोल्टता के वर्ग-माध्य-मूल मान (V_{rms}) को वोल्टता का प्रभावी मान या आभासी मान कहते हैं।

प्रत्यावर्ती राशियों (धारा या वोल्टता) का वर्ग-माध्य-मूल मान निम्न दो विधियों द्वारा ज्ञात किया जा सकता है।

(i) मध्य कोटि विधि (Mid-ordinate method)

(ii) समाकलन विधि (Integral method)

7.2–3 मध्य कोटि विधि द्वारा प्रत्यावर्ती राशियों का वर्ग-माध्य-मूल मान ज्ञात करना (Finding the R.M.S. Value of Alternating Quantities by Mid-ordinate Method)—चित्र 7.6 (अ) एवं (ब) में क्रमशः विकर्त तथा सममित ज्यावक्रीय प्रत्यावर्ती



चित्र—7.6 (अ) विकर्त ज्यावक्रीय प्रत्यावर्ती वोल्टता का एक धनात्मक प्रत्यावर्तन

वोल्टता, दोनों का एक-एक धनात्मक प्रत्यावर्तन (अर्द्ध चक्र) दिखाया गया है। कल्पना कीजिये कि इन अर्द्ध चक्रों के लिये समय t सेकण्ड है तथा n तुल्य भागों में विभाजित किया गया है। इस प्रकार प्रत्येक भाग के लिये समय $= t/n$ सेकण्ड। कल्पना कीजिये कि इन तुल्य भागों में तात्क्षणिक वोल्टता का मान क्रमशः औसत $e_1, e_2, e_3, e_4 \cdots e_n$ (मध्य कोटि में) है।

यदि परिपथ का प्रतिरोध R ओह्म हो तथा प्रतिरोध में प्रवाहित होने वाली दिष्ट धारा I ऐम्पियर तथा सप्लाई वोल्टता V वोल्ट हो:

तथा t सेकण्ड में दिष्ट धारा द्वारा उत्पन्न ऊष्मा

$$H = \frac{I^2Rt}{J} \text{ कैलोरी} = \frac{E^2}{R} \times \frac{t}{J} \text{ कैलोरी} \qquad (\because E = IR)$$

अब प्रत्यावर्ती धारा द्वारा उत्पन्न ऊष्मा :

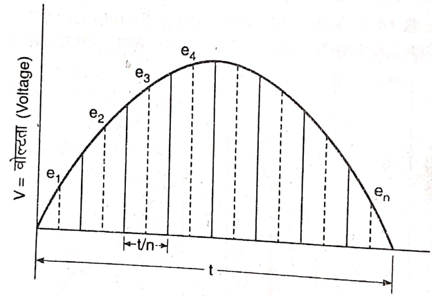
प्रथम मध्यान्तर (interval) में उत्पन्न ऊष्मा,

$$H_1 = \frac{e_1^2}{RJ}\cdot\frac{t}{n} \text{ कैलोरी}$$

द्वितीय मध्यान्तर में उत्पन्न ऊष्मा, $H_2 = \frac{e_2^2}{RJ}\cdot\frac{t}{n}$ कैलोरी

तृतीय मध्यान्तर में उत्पन्न ऊष्मा, $H_3 = \frac{e_3^2}{RJ}\cdot\frac{t}{n}$ कैलोरी

चतुर्थ मध्यान्तर में उत्पन्न ऊष्मा, $H_4 = \frac{e_4^2}{RJ}\cdot\frac{t}{n}$ कैलोरी



चित्र—7.6 (ब) सममित ज्यावक्रीय प्रत्यावर्ती वोल्टता का एक धनात्मक प्रत्यावर्तन

n मध्यान्तर में उत्पन्न ऊष्मा, $H_n = \frac{e_n^2}{RJ}\cdot\frac{t}{n}$ कैलोरी

t सेकण्ड में कुल उत्पन्न ऊष्मा,

$$H = H_1 + H_2 + H_3 + H_4 + \ldots H_n$$

$$H = \frac{t}{RJ}\cdot\left(\frac{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2 + \cdots e_n^2}{n}\right)$$

परिभाषा के अनुसार दोनों ऊष्मायें समान होंगी।

$$\therefore \quad \frac{E^2}{R}\cdot\frac{t}{J} = \frac{t}{RJ}\left(\frac{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2 + \cdots e_n^2}{n}\right)$$

या $$E^2 = \frac{e_1^2 + e_2^2 + e_3^3 + e_4^2 \cdots + e_n^2}{n}$$

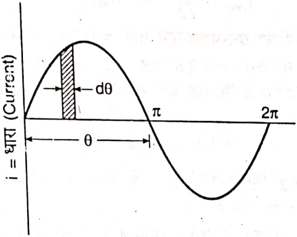
या $$E = \sqrt{\left(\frac{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2 \cdots + e_n^4}{n}\right)}$$ (सूत्र)

इसी प्रकार, प्रत्यावर्ती धारा का वर्ग-माध्य-मूल मान भी ज्ञात किया जा सकता है जिसकी निम्न समीकरण प्राप्त होगी।

$$I = \sqrt{\left(\frac{i_1^2 + i_2^2 + i_3^2 + i_4^2 \cdots + i_n^2}{n}\right)}$$ (सूत्र)

7.2–4 समाकलन विधि (Integral Method)—ज्यावक्रीय प्रत्यावर्ती धारा की मानक समीकरण, $i = I_m \sin \omega t = I_m \sin \theta$ है।

प्रत्यावर्ती धारा का वर्ग-माध्य-मूल मान, प्रत्यावर्ती धारा के धनात्मक प्रत्यावर्तन (अर्द्ध चक्र या पूर्ण चक्र) को लेकर ज्ञात किया जा सकता है।



चित्र—7.7

अतः एक धनात्मक अर्द्ध चक्र के लिये तात्क्षणिक धारा के वर्ग का औसत मान,

$$(I_{\text{rms}})^2 = \int_0^{\pi} \frac{i^2 . d\theta}{\pi - 0}$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{i^2 d\,\theta}{\pi}$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{(I_m \sin \theta)^2 d\theta}{\pi} \qquad (\because\ i = I_m . \sin \theta \text{ रखने पर})$$

$$= \frac{I_{m.}^2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 \theta \, d\theta$$

$$= \frac{I_m^2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{(1 - \cos 2\theta)\, d\theta}{2}$$

$$\left(\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \text{ रखने पर}\right)$$

$$= \frac{I_m^2}{2\pi} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{I_m^2}{2\pi} \left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi}$$

$$(I_{\text{rms}})^2 = \frac{I_m^2}{2\pi} \left[\pi - 0 - \left(\frac{\sin 2\pi - \sin 0}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{I_m^2}{2\pi} \times \pi$$

$$= \frac{I_m^2}{2}$$

$$\therefore \qquad (I_{\text{rms}})^2 = \frac{I_m^2}{2}$$

या $$I_{\text{rms}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad \text{या} \quad I_{\text{rms}} = 0.707\, I_m \quad \text{(सूत्र)}$$

इस प्रकार धारा का वर्ग-माध्य-मूल मान = 0.707 × धारा का अधिकतम मान तथा इसी प्रकार वोल्टता का वर्ग-माध्य-मूल मान $E_{\text{rms}} = 0.707$ वोल्टता का अधिकतम मान। यह ध्यान में रखने योग्य है कि एक पूर्ण चक्र में औसत ऊष्मा प्रभाव

$$= I^2R = \left(\frac{I_m}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot R = \tfrac{1}{2} I_m^2 R$$

विचार प्रश्न 7.2 विद्युत इन्जीनियरी में प्रत्यावर्ती राशियों के वर्ग-माध्य-मूल मानों (RMS value) का क्या महत्व है?

उत्तर: प्रत्यावर्ती राशियों के वर्ग-माध्य-मूल मानों का विद्युत इन्जीनियरिंग में अपना एक विशेष महत्व है क्योंकि ऐमीटर तथा वोल्टमीटर क्रमश: प्रत्यावर्ती धारा तथा वोल्टता का वर्ग-माध्य-मूल मान (RMS value) ही पढ़ते हैं। विद्युत इन्जीनियरिंग में धारा एवं वोल्टता के मान को सदैव वर्ग-माध्य-मूल मान में ही दिया जाता है जब तक कि उसके आगे कुछ और न लिखा हो।

§ 7.3 औसत या मध्यमान (Average Value) (U.P. 1993, 2001, 2002)

हम जानते हैं कि प्रत्यावर्ती राशियों का मान परिवर्तनशील होता है इसलिये प्रत्यावर्ती धारा की तुलना अपरिवर्ती धारा (steady current) या दिष्ट धारा से की जाती है।

अत: प्रत्यावर्ती धारा का औसत या मध्यमान, उस अपरिवर्ती धारा या दिष्ट धारा के तुल्य होता है जो किसी परिपथ के आर-पार (across) वही आवेश (charge) स्थानान्तर करे जितना प्रत्यावर्ती धारा द्वारा उतने ही समय में स्थानान्तर (transfer) होता है। ज्यावक्रीय प्रत्यावर्ती धारा के एक चक्र के धनात्मक तथा ऋणात्मक दोनों अर्द्ध चक्र एक समान होने के कारण प्रत्यावर्ती धारा का एक पूर्ण चक्र के लिये **औसत मान शून्य होता है**। इस प्रकार अर्द्ध चक्रों के तात्क्षणिक मानों का औसत मान जोड़कर या समाकलन करके प्राप्त किया जा सकता

है। परन्तु असमान प्रत्यावर्ती धारा जैसे अर्द्ध-तरंग दिष्टकारी धारा (half-wave rectified current) के लिये पूर्ण चक्र के तात्क्षणिक मानों को जोड़ना या समाकलन करना चाहिये। धारा का औसत मान भी (§ 7.2-3 व 7.2-4) के अनुसार मध्य कोटि तथा समाकलन विधि द्वारा ज्ञात किया जा सकता है।

7.3–1 मध्यकोटि विधि द्वारा प्रत्यावर्ती धारा का औसत मान

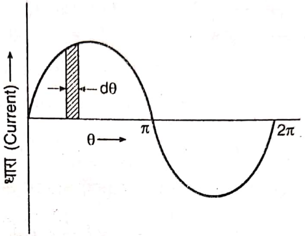
$$I_{av} = \frac{i_1 + i_2 + i_3 \cdots + i_n}{n}$$

7.3 के संदर्भ से,

7.3–2 समाकलन विधि द्वारा प्रत्यावर्ती धारा का औसत मान ज्ञात करना—प्रत्यावर्ती धारा की मानक समीकरण, $i = I_m . \sin\theta$

चित्र 7.8 के सन्दर्भ से अर्द्ध चक्र के लिये धारा का औसत मान

$$I_{av} = \int_0^{\pi} \frac{i d\theta}{\pi - 0}$$



चित्र--7.8

या
$$I_{av} = \int_0^{\pi} i . \frac{d\theta}{\pi - 0} = \int_0^{\pi} I_m . \frac{\sin\theta}{\pi} . d\theta$$

(i का मान $I_m . \sin\theta$ रखने पर)

या
$$I_{av} = \frac{I_m}{\pi} \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta$$

$$= \frac{I_m}{\pi} \Big[-\cos\theta \Big]_0^{\pi}$$

$$= \frac{I_m}{\pi} \Big[-(\cos\pi - \cos 0^\circ) \Big]$$

$$= \frac{I_m}{\pi} \Big[-(-1-1) \Big]$$

$$= \frac{I_m}{\pi} . 2 = \frac{2I_m}{\pi}$$

$\therefore$ $$I_{av} = \mathbf{0.636}\ \boldsymbol{I_m} \text{ ऐम्पियर}$$

इसी प्रकार प्रत्यावर्ती वोल्टता का औसत मान

$$E_{av} = \frac{2.E_m}{\pi} = 0.636\ E_m \qquad \text{(सूत्र)}$$

7.3–3 रूप गुणांक (Form Factor)—प्रत्यावर्ती राशियों के वर्ग-माध्य-मूल मान (r.m.s value) तथा औसत मान के अनुपात को रूप गुणांक कहते हैं तथा इसे K_f से प्रदर्शित करते हैं। **(B.T.E. 2002)**

रूप गुणांक (form factor), $K_f = \dfrac{\text{वर्ग-माध्य-मूल मान (r.m.s value)}}{\text{औसत मान (average or mean value)}}$

$$K_f = \frac{0.707\, I_m}{0.636\, I_m} = 1.11$$ (ज्यावक्रीय प्रत्यावर्ती धारा के लिये)

$$K_f = \frac{0.707\, E_m}{0.636\, E_m} = 1.11$$ (ज्यावक्रीय प्रत्यावर्ती वोल्टता के लिये)

7.3–4 शृंग या शीर्ष गुणांक (Crest or Peak or Amplitude Factor)—प्रत्यावर्ती राशियों के उच्चतम मान तथा वर्ग-माध्य-मूल मान (r.m.s value) के अनुपात को शृंग या शीर्ष गुणांक कहते हैं। इसे K_a से प्रदर्शित करते हैं।

$$K_a = \frac{\text{उच्चतम मान (maximum value)}}{\text{वर्ग-माध्य-मूल मान (rms value)}}$$

या $$K_a = \frac{I_m}{I_m/\sqrt{2}} = \sqrt{2} = 1.414$$ (केवल ज्यावक्रीय प्रत्यावर्ती धारा के लिये)

इसी प्रकार ज्यावक्रीय प्रत्यावर्ती वोल्टता के लिये,

$$K_a = \frac{E_m}{E_m/\sqrt{2}} = \sqrt{2} = \mathbf{1.414}$$